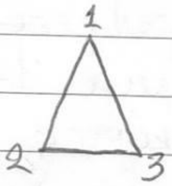
NO: 19-03-16
Date:

$$S_3=\left\{ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \right.$$

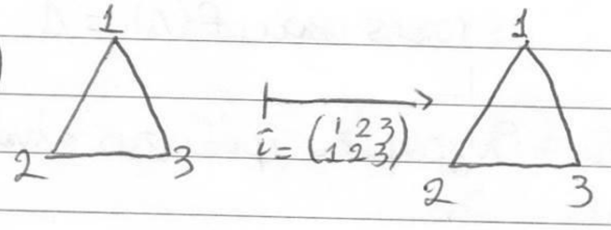
$$\left. \rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \right\}$$

• Δ: ισόπλευρο τρίγωνο



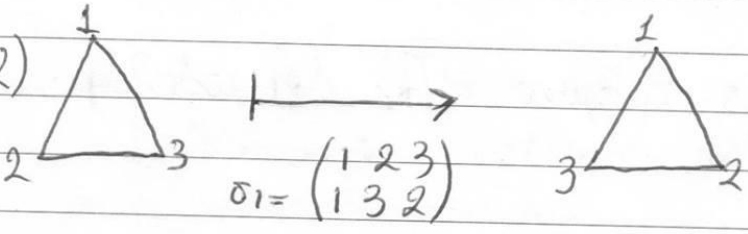
Οι μεταθέσεις του είναι οι ακόλουθες:

1)



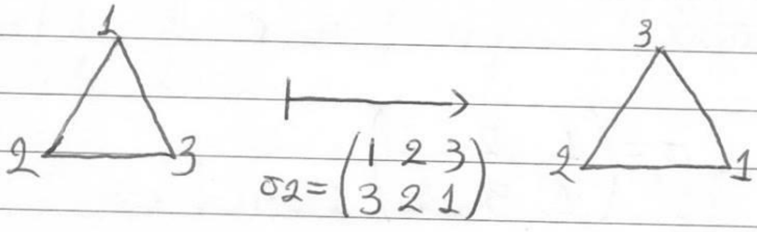
$i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

2)



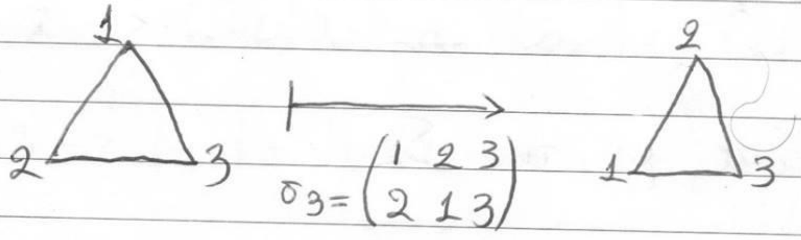
$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

3)



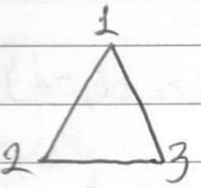
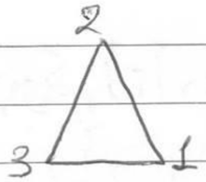
$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

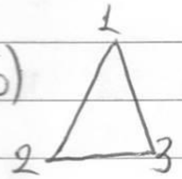
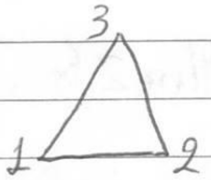
4)



$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

NO:
Date:

5)  $\xrightarrow[\rho_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}]{}$ 

6)  $\xrightarrow[\rho_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}]{}$ 

Παρατηρούμε ότι: $\sigma_1^2 = \iota$, $\iota^2 = \iota$, $\sigma_2^2 = \iota$, $\sigma_3^2 = \iota$, $\rho_1^2 = \rho_2$, $\rho_2^2 = \rho_1$

- $\rho_2^2 = \rho_1 \cdot \rho_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \rho_1$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \rho_1 \\ \\ \cdot\ \sigma_3 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \rho_2 \end{array}\right\} \neq$$

Συνεπώς, $\sigma_2 \cdot \sigma_3 \neq \sigma_3 \cdot \sigma_2$

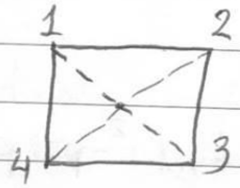
Άσκηση!
Να βρεθεί ο πίνακας Cayley της S_3!

NO:
Date:

• Υποομάδες της S_3: $\{i\}, S_3, \langle\sigma_1\rangle=\{i,\sigma_1\}, \langle\sigma_2\rangle=\{i,\sigma_2\}$,

$\langle\sigma_3\rangle=\{i,\sigma_3\}, \langle\rho_1\rangle=\{i(=\rho_1^3),\rho_1^2=\rho_2\}=\{i,\rho_1,\rho_2\}$

Υπενθύμιση: $\langle\alpha\rangle=\{\alpha^n\in G \mid n\in\mathbb{Z}\}$

• Δ: 

Συμμετρίες:

1) $i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Ταυτοτική

2) $\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \longrightarrow$ Στροφή τετραγώνου κατά 90°

3) $\rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \longrightarrow$ Στροφή τετραγώνου κατά 180°

4) $\rho_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \longrightarrow$ Στροφή τετραγώνου κατά 270°

5) $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \longrightarrow$ Ανάκλαση ως προς ευθεία ε_1

6) $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} \longrightarrow$ Ανάκλαση ως προς ευθεία ε_2

7) $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} \longrightarrow$ Ανάκλαση ως προς διαγώνιο Δ_1

8) $\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} \longrightarrow$ Ανάκλαση ως προς διαγώνιο Δ_2

NO:
Date:

Η ομάδα που περιγράψαμε είναι η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου. Καλείται η τέταρτη διεδρική ομάδα και συμβολίζεται ως εξής:

$D_4 = \{ \tau, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \}$

- Παρατηρούμε ότι: $\rho_2 = \rho_1^2$, $\rho_3 = \rho_1^3 = \rho_1^4 = \tau$, $\sigma_i^2 = \tau$, $\underline{1 \le i \le 4}$

Σημειώνεται πως η ομάδα D_4 <u>ΔΕΝ</u> είναι αβελιανή!

Γενικά, η ομάδα συμμετριών ενός κανονικού n-γώνου καλείται η n-οστή διεδρική ομάδα, συμβολίζεται με D_n και $|D_n| = 2n$

<u>Άσκηση</u>: Ποια είναι η ομάδα συμμετριών ενός (μη τετράγωνου) παραλληλογράμμου;

• Διάγραμμα Hasse των υποομάδων μιας ομάδας

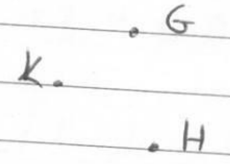
Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα {συνήθως θα απαιτούμε $|G|<\infty$)

⇝ Το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της G είναι ένα διάγραμμα στο επίπεδο, το οποίο αποτελείται από ακμές και κορυφές.

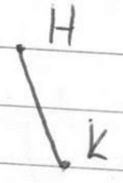
α) Οι ακμές αντιστοιχούν στις υποομάδες της ομάδας G

β) Τοποθετούμε τις υποομάδες με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων "ψηλότερα" απ' τις άλλες.

Για παράδειγμα, αν H,K με $H\leq G$, $K\leq G$ και $|H<|K|$, θα γράφαμε:



γ) Αν H,K είναι δύο υποομάδες της G, τότε υπάρχει ακμή η οποία συνδέει τις κορυφές που αντιστοιχούν στις H,K αν και μόνο αν: η μία υποομάδα περιέχεται στην άλλη και δεν υπάρχει άλλη υποομάδα να περιέχεται γνήσια ανάμεσα στις H,K.



$K\leq H$ και $\nexists\, L\leq G : K \lneq L \lneq G$

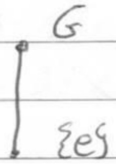
NO:
Date:

• Διαγράμματα Hasse ομάδων με πλήθος στοιχείων ≤ 4

① $|G|=1 \Rightarrow G=\{e\}$ και Διάγραμμα Hasse: $\bullet G$

② $|G|=2 \Rightarrow G=\{e,\alpha\}$. Τότε λοιπόν οι υποομάδες της G, είναι $\{e\}$, G

Διάγραμμα Hasse:



③ $|G|=3 \Rightarrow G=\{e,\alpha,b\}$, $b = \alpha^2$

Υποομάδες της G: $\{e\}, G$. Το Διάγραμμα Hasse ταυτίζεται με το προηγούμενο.

Αν $H \leq G$, ισχύει $e \in H$.

$\rightsquigarrow |H|=1 \Rightarrow H=\{e\}$
$\rightsquigarrow |H|=3 \Rightarrow H=G$

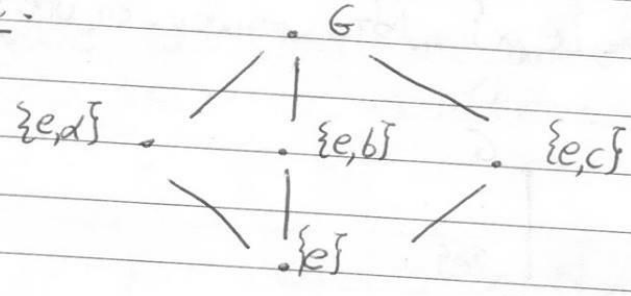
$\rightsquigarrow |H|=2 \rightsquigarrow H=\{e,\alpha\}$, άτοπο διότι θα πρέπει $\alpha\cdot\alpha=\alpha^2=b\in H$
Το $\alpha^2 \notin H$

NO:
Date:

(4) α) $G = \{e, a, b, c\}$: Ομάδα του Klein

Υποομάδες της G: $\{e\}$, G, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$

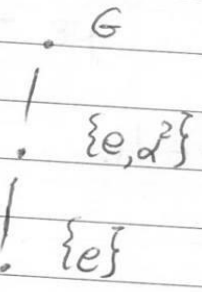
Διάγραμμα Hasse:



β) $G = \{e, a, a^2, a^3\}$: κυκλική υποομάδα με 4 στοιχεία

Υποομάδες της G: $\{e\}$, G, $\{e, a^2\}$ | Ισχύει: $a^4 = e$

Διάγραμμα Hasse



Άσκηση: Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και H, K υποομάδες της G. Τότε
$H \cup K \leq G \iff$

i) Είτε $H \subseteq K$

ii) Είτε $K \subseteq H$

NO:
Date:

Λύση: $(\Leftarrow)$ Αν $H \subseteq K$, τότε: $H \cup K = K \leq G$

Αν $K \subseteq H$, τότε: $H \cup K = H \leq G$

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $H \cup K \leq G$. Υποθέτουμε $H \not\subseteq K$ και $K \not\subseteq H$

Τότε: $\left\{\begin{array}{l} H \not\subseteq K \Rightarrow \exists \alpha \in H \text{ και } \alpha \notin K \\ K \not\subseteq H \Rightarrow \exists b \in K \text{ και } b \notin H \end{array}\right\} \Rightarrow$ Τότε $\left.\begin{array}{l} \alpha, b \in H \\ b \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha, b \in H \cup K$

Άρα, επειδή $H \cup K \leq G$, θα έχουμε: $\alpha \cdot b \in H \cup K \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i) \, ab \in H \text{ ή} \\ ii) \, ab \in K \end{array}\right.$

i) $\left.\begin{array}{l} ab \in H \\ \alpha \in H \end{array}\right\} \xrightarrow[H \leq G]{} \alpha^{-1}\alpha b \in H \Longrightarrow b \in H$. Άτοπο

ii) $\left.\begin{array}{l} ab \in K \\ b \in K \end{array}\right\} \xrightarrow[K \leq G]{} abb^{-1} \in K \Longrightarrow \alpha \in K$ Άτοπο

(Λόγω της υπόθεσης)

Συνεπώς, δεν ισχύει η αρχική υπόθεση και παίρνουμε:

Είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$

NO:
Date:

Τάξη στοιχείου ομάδας

Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα

• **Ορισμός:** Η ομάδα G καλείται πεπερασμένη ομάδα $\Longleftrightarrow$ $|G|<\infty$ και τότε ο αριθμός $|G|$ θα καλείται τάξη της ομάδας και συμβολίζεται $|G|$ ή $o(G)$

Η ομάδα G καλείται άπειρη ομάδα $\Longleftrightarrow$ $|G|=\infty$ και τότε θα γράφουμε $|G|=\infty$ ή $o(G)=\infty$ και λέμε ότι η G είναι ομάδα άπειρης τάξης

$(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$: $|\mathbb{Q}|=\infty$, $|\mathbb{R}|=\infty$

Παραδείγματα: ① Οι ομάδες $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ είναι άπειρες ομάδες.

Οι ομάδες $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ είναι επίσης άπειρες

② Οι ομάδες $(GL(n,K),\cdot)$ όπου $K=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ είναι άπειρες

③ Για κάθε $n\geq 1$ υπάρχει μια ομάδα με τάξη $|G|=n$
πχ: $G=(\mathbb{Z}_n,+)$

④ Η ομάδα του Klein: V_4 είναι τάξης 4, $|V_4|=4$

⑤ Η ομάδα τετρανίων του Hamilton Q έχει τάξη 8, $|Q|=8$

⑥ $|S_n|=n! \quad \forall n\geq 1$

NO:
Date:

· Ορισμός: Αν $(G,\cdot)$ είναι ομάδα και $\alpha \in G$, τότε η τάξη του α ορίζεται να είναι η τάξη της κυκλικής υποομάδας $\langle \alpha \rangle$ που παράγεται απ' το α και θα γράφουμε:

$o(\alpha) = |\langle \alpha \rangle|$

Παρατήρηση: Αν $(G,\cdot)$ είναι ομάδα και $\alpha \in G$ και αν $\alpha^n = e$, όπου $n \geq 1$, τότε: $\langle \alpha \rangle = \{e, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$

Απόδειξη: Επειδή $\langle \alpha \rangle = \{\alpha^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$, θα έχουμε:

$\{e, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\} \subseteq \langle \alpha \rangle$

Έστω $x \in \langle \alpha \rangle \Longrightarrow x = \alpha^m$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$

Από την Ευκλείδεια διαίρεση του m με το n θα έχουμε

$m = n \cdot q + r$, $0 \leq r < n$

Τότε λοιπόν: $x = \alpha^m = \alpha^{n \cdot q + r} = \alpha^{nq} \cdot \alpha^r = (\alpha^n)^q \cdot \alpha^r \overset{\alpha^n = e}{=\!=}$

$= e^q \cdot \alpha^r = \alpha^r$, $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$

Άρα, $x = \alpha^m \in \{e, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$

Συνοψίζοντας: $\langle \alpha \rangle = \{e, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$

NO:
Date:

Θεώρημα: Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα, $a \in G$ και $O(a) = \{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\}$

Τότε: ① Αν $O(a) = \emptyset \iff \boxed{o(a) = \infty}$

② Αν $O(a) \neq \emptyset \iff o(a) < \infty$ και $o(a) = \min O(a) =$
$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\}$

Απόδειξη: ① Έστω ότι $O(a) = \emptyset$. Θδο: $o(a) = |\langle a \rangle| = \infty$

Θεωρούμε το σύνολο $X = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots\}$. Τα στοιχεία του X είναι ανά δύο διαφορετικά, διότι: $a^k = a^\lambda$, $k \neq \lambda$

Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτω ότι $k > \lambda$

Άρα, $a^k \cdot (a^\lambda)^{-1} = e \Rightarrow a^k \cdot a^{-\lambda} = e \Rightarrow a^{k-\lambda} = e \Rightarrow (k-\lambda) \in O(a)$

Άτοπο διότι $O(a) = \emptyset$. Άρα, $a^k = a^\lambda \iff k = \lambda$

Επομένως, το X έχει άπειρο πλήθος στοιχείων κι επειδή

$X \subseteq \langle a \rangle \Rightarrow |\langle a \rangle| = \infty$ ή $o(a) = \infty$

NO:
Date:

② Έστω ότι $O(a) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \in O(a) \Rightarrow a^n = e$

Έστω $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a^k = e\} = O(a)$

Άρα, $a^n = e$ και $\forall\, k \in \mathbb{N}$, με $\underline{k < n} \Rightarrow \underline{a^k \neq e}$

Θα δείξουμε ότι: $o(a) = n$. Από την Παρατήρηση, έπεται ότι: $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

Αν $a^k = a^\lambda$, όπου $1 \leq k, \lambda \leq n-1$, τότε όπως και πριν:

$a^{k-\lambda} = e$, $k > \lambda$

Αν $k > \lambda$, τότε $k - \lambda \in \mathbb{N}$ και $a^{k-\lambda} = e \Rightarrow (k-\lambda) \in O(a)$ και $\underline{k - \lambda < n}$ - Άτοπο διότι: $n = \min O(a)$

Άρα, τα στοιχεία του X, $e, a, \dots, a^{n-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικά $\Rightarrow \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ έχει ακριβώς n στοιχεία $\Rightarrow o(a) = |\langle a \rangle| = n$

Παρατήρηση: Αν $(G, \cdot)$ είναι πεπερασμένη $(|G| < \infty)$

$\forall\, a \in G : o(a) < \infty$ $(\forall\, a \in G : \langle a \rangle \leq G)$

! ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο

$S_3 = \{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2\}$: Η τάξη του e είναι 1

$o(\sigma_i) = 2$, $1 \leq i \leq 3$, $o(\rho_i) = 3$, $1 \leq i \leq 2$